TD n°12 : Systèmes linéaires

Exercice 1.

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \\ -x+3y-2z & = & 0 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & 2 \\ x-2y+3z & = & 0 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z & = & 4 \\ -x+y+2z & = & 3 \\ 7x+3y-5z & = & 2 \end{array}\right. \quad d)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 0 \\ 2x\quad -z & = & 0 \\ x-2y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$e)\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z & = & 3 \\ x+2z & = & -1 \\ x-y-z & = & 2 \end{array}\right. \quad f)\left\{\begin{array}{ll} 4x+2y-2z & =0 \\ 3x-y+z & =3 \\ x+y+z & =1 \\ x-y+z & =-2 \end{array}\right. \quad g)\left\{\begin{array}{ll} 3x-6y-6z & =0 \\ x-2y-3z & =0 \\ -2x+4y+6z & =0 \\ 6x-12y-12z & =0 \end{array}\right.$$

Exercice 2.

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^4$:

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} -3x+y+z+t & = & 0 \\ x-3y+z+t & = & 0 \\ x+y-3z+t & = & 0 \\ x+y+z-3t & = & 0 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcl} -x+3y-t & = & 0 \\ 2x-y+2z+2t & = & 0 \\ 5y+2z & = & 0 \\ x+2y+2z+t & = & 0 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{ll} x+y+z+t & =1 \\ x+y-z-t & =-1 \end{array}\right.$$

Exercice 3.

A quelles conditions portant sur les paramètres a, b et c les systèmes suivants sont-ils compatibles ? Le cas échéant, finir la résolution des systèmes.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ x-y-z & = & b \\ -3x+y+3z & = & c \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} 3x-3y-2z & = & a \\ -4x+4y+3z & = & b \\ 2x-2y-z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 4.

Discuter et résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ll} x+y+mz & =m \\ mx+y+mz & =1 \\ mx+my+z & =m \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{ll} x+my+z & =1 \\ mx+y+(m-1)z & =m \\ x+y+z & =m+1 \end{array}\right. \quad (S_3)\left\{\begin{array}{ll} (m+1)x+my & =2m \\ mx+(m+1)y & =1 \end{array}\right.$$

Exercice 5.

Montrer que les matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles.

Exercice 6.

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse.

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 6u_n - v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 4v_n.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que pour tout n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$
2. Montrer que l'on peut décomposer A sous la forme $A = 5I + J$ où I est la matrice identité et J une matrice à déterminer qui vérifie $J^2 = 0$.
   En déduire A^n pour tout n. (On pensera à vérifier la formule pour $n = 0$ et $n = 1$).
3. Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 8.

On considère la suite u définie par : $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$. En déduire D^n.
3. Montrer que
$$\forall n \geqslant 0, \quad D^n = P^{-1}A^nP.$$
En déduire les coefficients de A^n.
4. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0.
   (c) Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 9.

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Déterminer alors la matrice D telle que $M = PDP^{-1}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$M^n = PD^nP^{-1}.$$
   (c) Expliciter M^n.

Au club de vacances, l'enfant choisit chaque jour une activité parmi "jeu de ballon", "planche à voile" ou "catamaran" selon les règles suivantes. Le premier jour, l'enfant choisit au hasard. Puis si la veille il a choisi

— le jeu de ballon, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité $1/2$, ou change pour la planche à voile (resp. catamaran) avec probabilité $1/4$.

— la planche à voile, il reste fidèle à ce sport avec probabilité $1/3$ ou change pour le ballon avec probabilité $2/3$.

— le catamaran, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité $1/4$ ou change pour la planche à voile (resp. le jeu de ballon) avec probabilité $1/4$ (resp. $1/2$).

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, b_n (resp. v_n, c_n) la probabilité que l'enfant choisisse le ballon (resp. planche à voile, resp. catamaran) le jour n. On définit
$$X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

2. (a) Déterminer X_1.
   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel non nul n :
$$X_{n+1} = M\,X_n.$$
   (c) En déduire X_n en fonction de M, n et X_1.
   (d) Déterminer alors b_n, v_n et c_n pour $n \geq 2$, et calculer leur limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10.

Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité p, et, lorsqu'il est vert, passe au rouge à l'instant suivant avec la probabilité q ($0 < p < 1$ et $0 < q < 1$). On note r_n (respectivement v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (respectivement au vert) à l'instant $t = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$r_{n+1} = (1-p)\,r_n + q\,v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = p\,r_n + (1-q)\,v_n.$$
2. En déduire l'existence d'une matrice carrée A d'ordre 2 telle que
$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$
4. Déterminer deux matrices B et C telles que
$$\begin{cases} B + C = I \\ B + (1-p-q)\,C = A \end{cases}$$
5. Vérifier que $BC = 0 = CB$ puis que $B^2 = B$ et $C^2 = C$.
6. A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n en fonction de B et C.
7. En déduire, pour $n \geq 1$, les valeurs de r_n et v_n en fonction de n, r_0 et v_0 puis leurs limites éventuelles.